

17/3/21

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Ν.β. $0, e^A$, A^{-1} να γραφεί σαν

γραμμικός συνδυασμός μονάδων, $(A - I)^{2000}$, $(3A - 5I) \cdot (A^3 - 4A^2 + 4A + I)^{-1}$

Λύση.

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ (διαφορετικές άρα διαγωνοποιείται)

A διαγωνοποιείται ($\Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_A(x)$)

$$\chi_A(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow \chi_A(A) = A^2 - 3A + 2I = O_{2 \times 2} \quad (1)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

(1) Ποίγω

$$A^{-1} \cdot (A^2 - 3A + 2I) = A^{-1} \cdot O_{2 \times 2} \Rightarrow$$

$$\text{με } (1) \text{ με } A^{-1} \Rightarrow A - 3I + 2A^{-1} = O_{2 \times 2} \Rightarrow 2A^{-1} = -A + 3I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I : \text{ γραμμικός συνδυασμός μονάδων}$$

$$V(1) = \langle (1, 1) \rangle, V(2) = \langle (1, 2) \rangle \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \Rightarrow e^A = P \cdot e^{\Lambda} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet (A - I)^{2000} &= (P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} - I)^{2000} = (P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} - P \cdot I \cdot P^{-1})^{2000} = \\ &= [P (\Lambda - I) P^{-1}]^{2000} = P \cdot (\Lambda - I)^{2000} \cdot P^{-1} = \\ &= P \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{2000} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2000} P^{-1} = \end{aligned}$$

$$(*) (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \dots$$

$$(3A - 5I)(A^3 - 4A^2 + 4A + I)^{-1}$$

α γόνος (Νέ zu Διαγωνοποιώ) : $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$

$$(3P\Lambda \cdot P^{-1} - 5P \cdot I \cdot P^{-1})(P\Lambda^3 \cdot P^{-1} - 4P\Lambda^2 \cdot P^{-1} + 4P\Lambda \cdot P^{-1} + P \cdot I \cdot P^{-1})^{-1}$$

$$= P(3\Lambda - 5I)P^{-1} [P(\Lambda^3 - 4\Lambda^2 + 4\Lambda + I) \cdot P^{-1}]^{-1} (*)$$

$$= P(3\Lambda - 5I) \overset{P^{-1} \cdot P = I}{(P^{-1} \cdot P^{-1})^{-1}} (\Lambda^3 - 4\Lambda^2 + 4\Lambda + I)^{-1} \cdot P^{-1} =$$

$$= P(3\Lambda - 5I)(\Lambda^3 - 4\Lambda^2 + 4\Lambda + I)P^{-1} (*)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(*) P \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot P^{-1} = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$$

β' γόνος (Αν ο Α δει Διαγωνοποιείται)

$$A^3 - 4A^2 + 4A + I (*) \text{ (Χρησιμοποιώ το ελάχιστο για να Ελαττώσω τον βαθμό μου)}$$

$$\chi_A(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow A^2 - 3A + 2I \stackrel{(2)}{=} O_{2 \times 2} \Rightarrow A^3 - 2A^2 + 2A = O \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^3 = 2A^2 - 2A$$

$$(*) = 2A^2 - 2A - 4A^2 + 4A + I \stackrel{(1)}{=} \dots$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} -2A^2 + 2A + I \stackrel{(2)}{=} -6A + 4I + 2A + I = -4A + 5I = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A^2 = 3A - 2I$$

$$(3A - 5I) \cdot (-4A + 5I)^{-1} = \text{Απάντηση}$$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ Να εξετάσετε αν ο A διαγωνοποιείται, αν $\exists$ ο A^{-1} . Να βρείτε τον A^{-1} και τις ιδιοτιμές του e^A .

Λύση:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -1 & -2 \\ 6-\lambda & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 8-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (6-\lambda) [(8-\lambda)(10-\lambda) - 8] = (6-\lambda) (\lambda^2 - 18\lambda + 80 - 8) = \\ &= (6-\lambda) (\lambda^2 - 18\lambda + 72) = (6-\lambda)^2 \cdot (12-\lambda) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 12$$

$$\begin{aligned} V(6) &= \langle (1, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle \Rightarrow A \text{ διαγωνοποιείται} \\ V(12) &= \langle (-1, 1, 2) \rangle \end{aligned}$$

$$\equiv \text{έχω ότι } \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det A \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ ο } A^{-1}$$

$$A \text{ διαγωνοποιείται} \Leftrightarrow \chi_A(x) = (x-6)(x-12) = x^2 - 18x + 72$$

$$\begin{aligned} A^2 - 18A + 72I &= O_{3 \times 3} \Rightarrow A^{-1}A^2 - 18A^{-1}A + 72A^{-1}I = O_{3 \times 3} \\ \Rightarrow A - 18I + 72A^{-1} &= O_{3 \times 3} \Rightarrow 72A^{-1} = -A + 18I \Rightarrow \\ \Rightarrow A^{-1} &= -\frac{1}{72}A + \frac{18}{72}I \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{72}A + \frac{1}{4}I \end{aligned}$$

$$P^A: A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

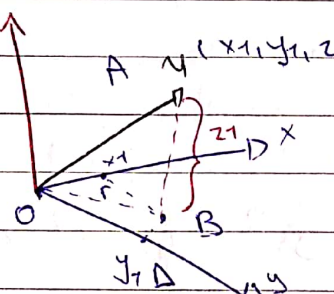
$$P^A = P \cdot P^{\Lambda} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο

π.χ. Διανυσματικοί χώροι: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_n[x], \mathbb{F}^n$
 Διάνυσμα $(x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $f(x) = e^x$
 Διανύσματα στη φυσική: μέτρο, διεύθυνση, φορά

Από τι εξαρτάται το μέτρο και η διεύθυνση?

π.χ. $\mathbb{R}^3$



$$\|u\|^2 = OB^2 + BA^2 = OB^2 + z_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (x_1 \ y_1 \ z_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (x_1 \ y_1 \ z_1) (x_1 \ y_1 \ z_1)^T = u \cdot u^T$$

$\begin{matrix} 1 \times 3 & & 3 \times 1 \end{matrix}$

Εσωτερικό γινόμενο: $\|u\|^2 = u \cdot u^T : 1$ αντιστοιχεί

Ορισμός: Έστω V δ.χ. - Μια συνάρτηση $\langle _, _ \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο στον V , αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- 1) $\langle u+u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$
- 2) $\langle r \cdot u, v \rangle = r \langle u, v \rangle, r \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$

3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ αλγεβρές. Αν είμαι στον $\mathbb{R}$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

5 τον $\mathbb{C}$ $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

4) $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$ μηδενικό διάνυσμα

Ένας δ -x εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο καλείται ευκλείδειος χώρος στον $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Π.χ: 1) $\mathbb{R}^3$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Αυτή η απεικόνιση ικανοποιεί τις 4 ιδιότητες

2) $\mathbb{R}^n$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

3) Εξετάστε αν η απεικόνιση στον $\mathbb{R}^2$ με τύπο:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = x \cdot x' + 2xy' + 2yx' + 5yy' \quad (+) \text{ ορίζει εσωτερικό γινόμενο}$$

Πρέπει να εξετάσουμε τις 4 ιδιότητες:

$$\bullet \underline{1}x \cdot x' + \underline{2}xy' + \underline{2}yx' + \underline{5}yy' = \underset{1 \times 2}{(x \ y)} \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

Ιδιότητα Το γινόμενο των πινάκων είναι διασπαστικό

$$(u+v) \cdot A \cdot (u')^t = (u \cdot A + v \cdot A) \cdot (u')^t = u \cdot A \cdot u'^t + v \cdot A \cdot u'^t$$

Άρα η (1) ισχύει

2) Το γινόμενο των πινάκων με αριθμό τάξης τον αριθμό ανιέξω $(ru) \cdot A \cdot u'^t = r(u \cdot A \cdot u'^t)$ Ισχύει

3) Η ανεικονιστική (+) έχει οριστεί στους πραγματικούς
 $(x, y) A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \text{αριθμός} = \left((x, y) A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^t =$
 $= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t A^t (x, y)^t = (x' \ y') \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$
 $= \langle (x', y'), (x, y) \rangle \text{ ισχύει } A = A^t \text{ συμμετρικός}$

4) $\langle (x, y), (x, y) \rangle \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2xy + 2xy + 5y^2 =$
 $= x^2 + 4xy + 5y^2 = (x+2y)^2 + y^2 \geq 0$

Είναι $= 0$ όταν $y=0$ και $x+2y=0 \Rightarrow x=0$. Άρα είναι
 $0 \Leftrightarrow x=y=0$ ισχύει

Π.χ. Δίνεται η ανεικονιστική $\langle -, - \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ με νόμο:
 $\langle (u, v), (u', v') \rangle = (u, v) \begin{pmatrix} 8 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, u, v, u', v' \in \mathbb{C}$

Να ελέγξετε αν ορίζεται εσωτερικό γινόμενο.

Λύση:

Εφόσον αυτή η ανεικονιστική δίνεται σαν γινόμενο συντελεστών οι δύο πρώτες ιδιότητες ισχύουν:

1) $\langle (u, v) + (z, w), (u', v') \rangle = ((u, v) + (z, w)) A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} =$
 $= (u, v) A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + (z, w) A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

2) $\langle c(u, v), (u', v') \rangle = (c(u, v)) A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = c(u, v) A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$
 $c \in \mathbb{C}$

3) $\langle (u, v), (u', v') \rangle = \overline{\langle (u', v'), (u, v) \rangle} \stackrel{(*)}{=} \rightarrow$
 $(u, v) A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad \overline{(u', v') A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} = (\bar{u}', \bar{v}') \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{8} & \overline{3-3i} \\ \overline{3+3i} & \bar{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3+3i \\ 3-3i & 5 \end{pmatrix}$$

$$④ = (u', v') A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\bar{u}', \bar{v}') \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \overline{(u, v) A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}^t$$

$$2) \angle (u, v), (u, v) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \angle (u, v), (u, v) &= (u, v) \begin{pmatrix} 8 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{8u \cdot \bar{u}}_{\|u\|^2} + (3+3i)v \cdot \bar{u} + (3-3i)u \cdot \bar{v} + \underbrace{5v \cdot \bar{v}}_{\|v\|^2} \end{aligned}$$

Έστω $u = a+bi$, $v = c+di$ να αναδιασυνδέσουμε:

$$\begin{aligned} \angle (u, v), (u, v) &= 8(\underline{a^2+b^2}) + 6(ac+db-ad+cd) + \\ &+ 5(\underline{c^2+d^2}) = \left(\underline{2a + \frac{3}{2}c}\right)^2 + \left(\underline{2a - \frac{3}{2}b}\right)^2 + \left(\underline{2b + \frac{3}{2}c}\right)^2 + \\ &+ \left(\underline{2b + \frac{3}{2}d}\right)^2 + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}d^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Αυτό είναι 0 $\Leftrightarrow a=b=c=d=0$

Κανονικό εσωτερικό διάνομενο στον $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \angle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \\ &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) (y_1, \dots, y_n)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Στον } \mathbb{C}^n: \angle (u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) &= u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n = \\ &= (u_1, \dots, u_n) (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)^t \end{aligned}$$

Ορισμός: 1) Αν ο $S \cdot x \cdot V$ είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο, $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}(C)$, τότε ορίζεται το μήκος ενός διανύσματος $u \in V$ με $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

2) Ορίζεται το γωνία ϕ μεταξύ των u και $v \in V$ να είναι το ανήκοντο: $\cos \phi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ και $0 \leq \phi \leq \pi$. Εδώ το εσωτερικό γινόμενο είναι στον $\mathbb{R}$

ΠΡΟΤΙΘΗ: Πρέπει να δείξουμε ότι: $-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$

Παρατήρηση: Αν οριστεί η γωνία μεταξύ 2 διανυσμάτων u και v μπορούμε να πούμε ότι θα είναι κάθετα μεταξύ τους όταν $\cos \phi = 0 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

Χώρος $\mathbb{R}^3$: Χωροχρόνος: $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$
χρόνος

Πχ: Τον $\mathbb{R}^2$ τον εφοδιάζουμε με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\langle -, - \rangle$ και το $\langle -, - \rangle'$ που δίνεται από: $\langle (x, y), (x', y') \rangle' = x \cdot x' + 2xy' + 2yx' + 5yy'$
 (Δείξαμε προηγουμένως ότι αυτό αποτελεί εσωτερικό γινόμενο)
 Να βρεθούν τα σύνολα των διανυσμάτων μήκους 1 με τα 2 εσωτερικά γινόμενα:

$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1 \}$ 1)
 $K' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|' = 1 \}$ 2)

1): $\|(x, y)\|^2 = \langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + y^2 = 1$. Το K είναι ένας κύκλος μήκους 1 με κέντρο $(0, 0)$

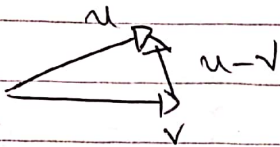
$$2) (\| (x, y) \|')^2 = 1 \Rightarrow \langle (x, y), (x, y) \rangle' = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 2xy + 2xy + 5y^2 = \boxed{(x+2y)^2 + y^2 = 1}$$

Το k' είναι ένας κύκλος ραδιού 1 με κέντρο (0,0) στον χώρο που θεωρεί σαν εσωτερικό διότι με το $\oplus$.

Το k' είναι έλλειψη όταν το βλέπουμε με το κανονικό εσωτερικό διότι με το $\oplus$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1) Απόσταση μεταξύ 2 διανυσμάτων u και v σ' έναν Ευκλείδειο χώρο V .

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u-v \rangle - \langle v, u-v \rangle = \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \\ &= \|u\|^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 - \langle u, v \rangle - \\ &\quad - \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Στον } \mathbb{R} \quad (*) \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ \cos \phi &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2 \cos \phi \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 : \text{Νόμος του συνημιτόνου}$$

2) Στον $\mathbb{R}$: Ανισότητα Cauchy-Schwarz :

$$: |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (C)$$

$$\text{Από το } (*) \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\text{Αντικαθιστώντας } v = -w \Rightarrow \|u+w\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, w \rangle + \|w\|^2$$

$$+ \quad - \quad w = \lambda z, \lambda \in \mathbb{R} : \|u+\lambda z\|^2 = \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, z \rangle + \lambda^2 \|z\|^2 : \text{Τριγωνισμός ως προς } \lambda \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Παράδειγμα: } \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, z \rangle + \lambda^2 \cdot \|z\|^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \text{Διακρίνουσα} \\
 &\leq 0 : 4 \langle u, z \rangle^2 - 4 \|u\|^2 \cdot \|z\|^2 \leq 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \langle u, z \rangle^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|z\|^2 \Rightarrow |\langle u, z \rangle| \leq \|u\| \cdot \|z\| \Leftrightarrow \\
 \frac{|\langle u, z \rangle|}{\|u\| \|z\|} &\leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, z \rangle}{\|u\| \|z\|} \leq 1 \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{συνφ}
 \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι το συνφ ορίζεται. Διότι:

$$-1 \leq \text{συνφ} = \frac{\langle u, z \rangle}{\|u\| \|z\|} \leq 1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Ισχύει για κάθε εσωτερικό γινόμενο.